

Популярные лекции
ПО МАТЕМАТИКЕ



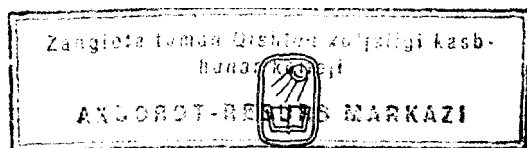
Ю.А. ШАШКИН

ЭЙЛЕРОВА
ХАРАКТЕРИСТИКА



Ю. А. ШАШКИН

ЭЙЛЕРОВА ХАРАКТЕРИСТИКА



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.
1984

Шашкин Ю. А.

Ш 32 Эйлерова характеристика.— М.: Наука, 1984.—
96 с.— (Популярные лекции по математике.) — 15 к.

В брошюре доказываются знаменитая формула Эйлера для выпуклых многогранников и ее аналоги для других фигур (плоскости, пространства, многоугольников). Эти формулы естественно подводят читателя к понятию эйлеровой характеристики. Даются два ее определения и доказывается их равносильность. Рассказывается о роли эйлеровой характеристики в различных геометрических задачах: о разбиении плоскости и пространства, о вычислении площадей, о покрытиях сферы.

Брошюра рассчитана на школьников старших классов, студентов младших курсов и всех любителей математики.

Ш $\frac{1702040000-165}{053(02)-84}$ 156—84

ББК 22.15
513

Рецензент

доктор физико-математических наук В. Г. Болтянский

Ш $\frac{1702040000-165}{053(02)-84}$ 156—84

© Издательство «Наука».
Главная редакция
физико-математической
литературы, 1984

ПРЕДИСЛОВИЕ

Крупнейший математик XVIII века Леонард Эйлер (1707—1783) родился в швейцарском городе Базеле. С двадцатилетнего возраста он жил в Петербурге, в Берлине, потом снова в Петербурге. Эйлер сыграл выдающуюся роль в развитии математики, механики, физики и техники. Он был пионером научных исследований по математике в России.

В 1758 г. Л. Эйлер опубликовал в «Записках Петербургской академии наук» доказательство формулы

$$B - P + G = 2, \quad (0.1)$$

связывающей число вершин B , число ребер P и число граней G произвольного выпуклого многогранника.

Предлагаемая брошюра посвящена формуле Эйлера (0.1), а также ее различным аналогам и приложениям. Пусть, например, на плоскости имеется конечное семейство прямых, которые пересекаются в некотором числе B точек («вершин») и разбивают плоскость на G штук «граней», а сами разбиваются вершинами на P штук «ребер». Тогда оказывается, что

$$B - P + G = 1. \quad (0.2)$$

Подобно тому, как формула (0.1) верна для любого выпуклого многогранника, формула (0.2) верна для любого семейства прямых на плоскости и не зависит ни от их числа, ни от их взаимного расположения.

Вообще, замечательный факт состоит в том, что если задана какая-то фигура (из некоторого определенного класса), то, как бы мы ни разбивали ее на части (грани, ребра и вершины), определенным образом «примыкающие» друг к другу, знакопеременная сумма $B - P + G$, называемая эйлеровой характеристикой фигуры, сохраняет постоянное значение.

В первой части этой брошюры (§§ 1—7) вычисляются эйлеровы характеристики прямой, плоскости, трехмерного пространства, многоугольников разных классов, границ выпуклых многогранников. В § 4 и § 5 даны приложения эйлеровой характеристики к вычислению площади многоугольника и суммы его внешних углов.

Во второй части брошюры (§§ 8—12) эйлерова характеристика фигуры (например, многоугольника) определяется аксиоматически, как «аддитивная функция» этой фигуры. В этом отношении она похожа на площадь многоугольника. Чтобы найти площадь объединения двух многоугольников, нужно, как известно, из суммы их площадей вычесть площадь их пересечения. Это и есть свойство аддитивности площади. Одна из аксиом эйлеровой характеристики требует, чтобы она обладала аналогичным свойством. Вторая аксиома (а именно, аксиома «нормировки») различает площадь и характеристику. «Нормировка» первой из этих двух функций многоугольника требует, чтобы площадь единичного квадрата была равна единице. Эйлерова характеристика «нормируется» так, что она равна единице на каждом выпуклом многоугольнике.

В § 9 доказывается существование эйлеровой характеристики, удовлетворяющей заданным аксиомам, а в § 10 — равносильность двух различных ее определений. Заключительный § 12 содержит приложения эйлеровой характеристики к некоторым задачам комбинаторной геометрии — нового направления математики, с которым читатель может познакомиться, например, по книгам [2], [5], [6] (цифры в квадратных скобках относятся к списку литературы, помещенному на с. 94).

В брошюре ничего не говорится о топологической инвариантности эйлеровой характеристики и вообще о ее роли в топологии. Читатель сможет почерпнуть сведения об этом из книги В. Г. Болтянского и В. А. Ефремовича [1].

За помощь в работе над книжкой автор благодарит И. Я. Гусака и А. Г. Нетребина.

Ю. А. Шашкин

§ 1. ФОРМУЛЫ ЭЙЛЕРА ДЛЯ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Простейший вариант формулы Эйлера возникает при разбиении прямой L на части конечным множеством точек. Если выбрать на прямой B штук точек, то они разбивают ее на $B - 1$ отрезков и два луча, т. е. всего на $B + 1$ частей. Обозначив число этих частей через P , имеем

$$B - P = -1. \quad (1.1)$$

Это и есть *формула Эйлера* для прямой. Она показывает, что разность $B - P$ постоянна, т. е. не зависит ни от числа выбранных точек, ни от их расположения, и выражает, таким образом, свойство самой прямой.

Перейдем теперь к плоскости Q и попытаемся получить для нее формулу Эйлера, аналогичную формуле (1.1). Для плоскости этот вопрос сложнее и интереснее, чем для прямой: ведь разбиение теперь осуществляется конечным семейством прямых, а эти прямые могут располагаться на плоскости различными способами. Например, две прямые могут либо пересекаться, либо быть параллельными. Для трех прямых имеется четыре случая взаимного расположения: все три прямые параллельны; две прямые параллельны, а третья пересекает их; каждая пара прямых имеет общую точку, но не существует точки, общей для всех трех; все три прямые проходят через одну точку. Различные случаи расположения четырех прямых изображены на рис. 1; их словесное описание было бы затруднительно. Можно было бы рассмотреть расположения пяти, шести и т. д. прямых; с ростом числа прямых быстро возрастает число различных способов их расположения.

Каждое семейство прямых разбивает плоскость на части, называемые *гранями разбиения*; их число мы будем обозначать буквой G . *Вершинами разбиения* называются точки пересечения данных прямых, а *ребрами разбиения* — части, на которые прямые делятся вершинами.

Число вершин и число ребер разбиения обозначим соответственно буквами B и P . Разбиение может не иметь ни одной вершины (и тогда $B=0$); это будет в том и только в том случае, когда каждые две прямые параллельны. Ребрами такого разбиения естественно считать сами прямые.

Оказывается, что числа B , P и Γ связаны между собой соотношением

$$B - P + \Gamma = 1. \quad (1.2)$$

Это — *формула Эйлера* для плоскости; она показывает, что знакопеременная сумма $B - P + \Gamma$ постоянна, т. е. не

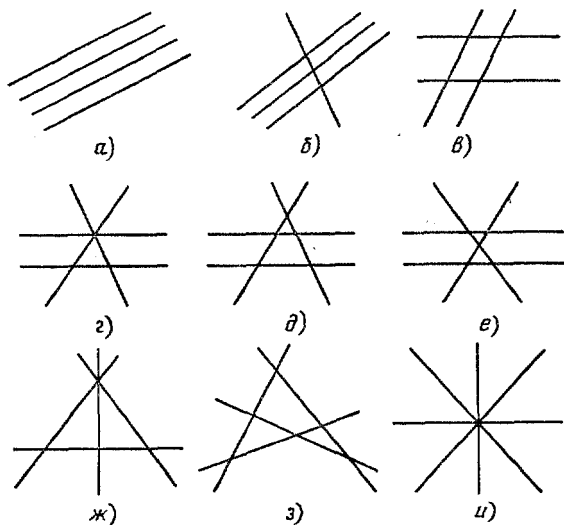


Рис. 1

зависит ни от числа прямых, разбивающих плоскость, ни от их взаимного расположения. Следовательно, формула Эйлера выражает свойство самой плоскости Q .

Докажем формулу (1.2) для разбиения, которое дают n прямых; предварительно сделаем несколько замечаний.

Во-первых, в случае, когда разбиение не имеет вершин, формула (1.2) очевидна, так как тогда $B=0$, $P=n$ и $\Gamma=n+1$.

Во-вторых, докажем следующую лемму, которая окажется полезной и в других случаях.

Л е м м а 1. Если на плоскости задано конечное число прямых, то можно провести новую прямую, не параллельную ни одной из данных.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, пусть заданы прямые $L_1, \dots, L_m$, и пусть O — какая-нибудь точка на прямой L_1 . Проведем через O прямую $L'_i \parallel L_i$ ($i=2, \dots, m$), и пусть φ_i обозначает угол между прямыми L_1 и L'_i , причем можно считать, что $0 \leq \varphi_i \leq 90^\circ$. Если $\varphi_i=0$ для всех i , т. е. если все заданные прямые параллельны между собой, то искомой будет любая прямая, не параллельная L_1 . В противном случае среди этих углов выберем наименьший положительный; пусть это будет, например, φ_2 . Прямая L , проходящая через точку O и образующая с L_1 положительный угол, меньший φ_2 , является искомой. Лемма 1 доказана.

В-третьих, чтобы доказать формулу (1.2), мы должны найти выражения для двух из трех величин B , P и Γ , предполагая третью величину известной. Пусть известно число вершин B (и, конечно, число прямых n). Оказывается, однако, что числа Γ и P не определяются числами n и B однозначно. Например, разбиения в) и ж) (рис. 1) имеют по одинаковому числу вершин $B=4$, но разные числа граней и ребер. Глядя на эти разбиения, можно заметить, что они различаются «строением» вершин: в разбиении в) через каждую вершину проходят две прямые, а в разбиении ж) имеется вершина, через которую проходят три прямые. Чтобы учесть это различие, введем следующее определение. *Кратностью* вершины разбиения назовем число проходящих через нее прямых данного семейства. Таким образом, кратность любой вершины есть натуральное число, не меньшее двух. Естественно ожидать, что числа Γ и P определяются, если, кроме n и B , считать заданными еще и кратности всех вершин. Мы увидим, что это действительно так.

Подсчет ребер и граней разбиения проведем методом «движущейся» прямой.

Пусть $L_1, \dots, L_n$ — заданные прямые и $A_1, \dots, A_B$ — вершины разбиения (рис. 2; на этом рисунке $n=5$ и $B=7$). Проведем через *каждую* пару вершин вспомогательную прямую; обозначим эти прямые через $M_1, \dots, M_k$. Среди них находятся, конечно, и все заданные прямые $L_1, \dots, L_n$. (На рис. 2 «лишние» вспомогательные прямые, т. е. отличные от прямых $L_1, \dots, L_n$, не изображены, чтобы не загромождать его; читатель проверит, что их следовало бы провести через пары точек A_1A_5 , A_2A_5 , A_2A_7 , A_3A_4 и A_6A_7 .)

Теперь, пользуясь леммой 1, проведем вспомогательную прямую L_0 , не параллельную ни одной из прямых $M_1, \dots, M_k$. Будем предполагать, что прямая L_0 расположена, во-первых, горизонтально, во-вторых, «ниже» всех вершин $A_1, \dots, A_n$. Отсюда следует, что для каждой пары вершин A_i и A_j их расстояния от прямой L_0 различны *). В дальнейшем этот факт будет выражаться словами «все вершины лежат на разной высоте», причем имеется в виду их высота над уровнем прямой L_0 . Будем предполагать, что вершины занумерованы в порядке возрастания высоты, т. е. пусть A_1 — самая нижняя вершина, A_2 лежит выше,

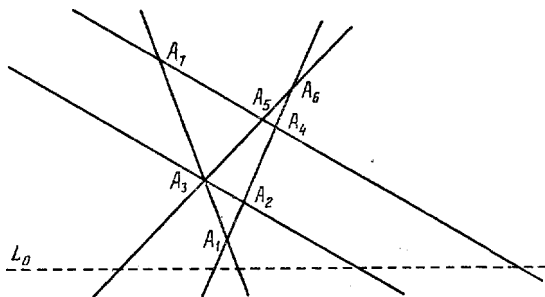


Рис. 2.

чем A_1 , но ниже, чем A_3 , и т. д., наконец, A_n — самая верхняя вершина.

«Движущаяся» прямая L будет располагаться горизонтально, совпадая в своем начальном положении с прямой L_0 и поднимаясь затем от нее вверх по плоскости. Прямую L можно использовать для подсчета ребер разбиения: так как она пересекается со всеми прямыми $M_1, \dots, M_n$, и притом с каждой из них в «своей» отдельной точке, то в начальном положении она встречает n ребер. Теперь заставим прямую L подниматься вверх по плоскости параллельно самой себе. До тех пор, пока она не встретит самую нижнюю вершину A_1 , число пересекаемых ею ребер останется неизменным и равным n . После перехода через вершину A_1 это число изменится: появятся новые ребра, число которых равно кратности α_1 вершины A_1 .

*) Действительно, если A_i и A_j находятся на одинаковом расстоянии от прямой L_0 , то прямая, проходящая через эти вершины, будет параллельна L_0 . Однако этого не может быть по построению L_0 .

Поэтому общее число ребер, встреченных к этому моменту прямой L , станет равным $n + \alpha_1$ и останется таким до встречи со следующей вершиной A_2 . Если эта последняя имеет кратность α_2 , то после перехода L через A_2 число ребер, уже встреченных к этому моменту, снова увеличится и станет равным $n + \alpha_1 + \alpha_2$ и т. д. Наконец, после перехода через последнюю, самую верхнюю, вершину A_B кратности α_B это число станет равным $n + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_B$. Итак, общее число ребер разбиения равно

$$P = n + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_B,$$

или, в более краткой записи,

$$P = n + \sum_{i=1}^B \alpha_i. \quad (1.3)$$

Число граней разбиения найдем следующим образом. В начальном положении прямая L делится прямыми $L_1, \dots, L_n$ на $n + 1$ частей; каждая из этих частей лежит в своей, ей соответствующей грани разбиения и поэтому «засчитывает» эту грань. Значит, прямая L в начальном положении встречает $n + 1$ граней, и это число не меняется, пока она не поднимется до вершины A_1 . После прохождения через A_1 , как мы видели, появляются новые ребра в числе α_1 . Ясно, что число новых граней, встреченных при этом прямой L , будет равно $\alpha_1 - 1$ *). Поэтому общее число граней, встреченных к этому моменту, будет равно $1 + n + \alpha_1 - 1$. После прохождения через вершину A_2 это общее число увеличивается на $\alpha_2 - 1$ и т. д.; наконец, когда L пересечет последнюю, самую верхнюю, вершину A_B , общее число граней еще увеличится на $\alpha_B - 1$. Поэтому

$$\Gamma = n + 1 + (\alpha_1 - 1) + (\alpha_2 - 1) + \dots + (\alpha_B - 1),$$

или

$$\begin{aligned} \Gamma &= 1 + n + \sum_{i=1}^B (\alpha_i - 1) = 1 + n + \sum_{i=1}^B \alpha_i - \sum_{i=1}^B 1 = \\ &= 1 + n - B + \sum_{i=1}^B \alpha_i. \end{aligned} \quad (1.4)$$

*) Эти новые грани заключены между α_1 новыми ребрами.

Здесь $\sum_{i=1}^B 1$ обозначает сумму единиц, взятую по всем вершинам разбиения и поэтому равную B .

Итак, мы выразили число ребер и число граней через число вершин и их кратности. Из формул (1.3) и (1.4) видно, между прочим, что числа P и Γ зависят только от суммы кратностей и не зависят, например, от порядка, в котором они появляются. Теперь из (1.3) и (1.4) немедленно получается формула Эйлера

$$B - P + \Gamma = B - n - \sum_{i=1}^B \alpha_i + 1 + n - B + \sum_{i=1}^B \alpha_i = 1.$$

Заметим, что доказательство этой формулы можно упростить, если не стараться получить явное выражение

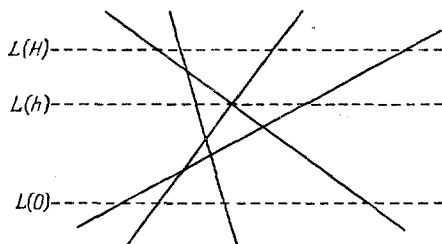


Рис. 3.

для чисел P и Γ . А именно, пусть все вершины разбиения лежат внутри горизонтальной полосы шириной H (рис. 3). Обозначим через $L(0)$ нижнюю границу этой полосы, т. е. прямую L в ее начальном положении, через $L(H)$ — верхнюю границу полосы, т. е. прямую L в ее заключительном положении, и через $L(h)$ — прямую L , расположенную на расстоянии h от $L(0)$. Пусть $P(h)$ обозначает число ребер, уже встреченных движущейся прямой L к тому моменту, когда она занимает положение $L(h)$; аналогичный смысл имеют обозначения $B(h)$ и $\Gamma(h)$. Величины $P(h)$, $B(h)$ и $\Gamma(h)$ меняются в зависимости от h ; нам надо доказать, что их знакопеременная сумма $S(h) = B(h) - P(h) + \Gamma(h)$ принимает значение 1, когда $h = H$. Если $h = 0$, то, как мы видели, $B(h) = B(0) = 0$, $P(0) = n$, $\Gamma(0) = 1 + n$, и поэтому $S(0) = 1$. При прохождении пря-

мой L через вершину A_i число $P(h)$ увеличивается на α_i , $\Gamma(h)$ увеличивается на $\alpha_i - 1$, а $B(h)$ увеличивается на 1, поэтому $S(h)$ не изменяет своего значения. В частности, $S(H)=1$, что и требовалось доказать.

Задачи

1. Докажите, что при любом разбиении прямой конечным числом B точек сумма $B+P$ нечетна.

2. Докажите, что при любом разбиении плоскости конечным числом прямых сумма $B+P+\Gamma$ нечетна.

3. Говорят, что прямые на плоскости находятся в *общем положении*, если никакие две из них не параллельны и никакие три из них не имеют общей точки. Докажите, что для любого натурального числа n на плоскости существует n прямых общего положения.

4. Покажите, что если разбиение плоскости осуществляется n прямыми общего положения, то

$$P=n^2, \quad \Gamma=1+n+\frac{n(n-1)}{2}.$$

5. Докажите формулу Эйлера (1.2) методом движущейся прямой в предположении, что эта прямая параллельна одной или нескольким прямым семейства.

6. Для семейства прямых общего положения докажите формулу Эйлера методом математической индукции по числу прямых.

7. Плоская фигура называется *ограниченной*, если она лежит в круге некоторого (может быть, и очень большого) радиуса, и *неограниченной* — в противном случае. Найдите число P_1 ограниченных ребер (т. е. отрезков) и число P_2 неограниченных ребер (т. е. лучей), а также число Γ_1 ограниченных граней и число Γ_2 неограниченных граней для разбиения плоскости, имеющего вершины. Покажите, что

$$B-P_1+\Gamma_1=1.$$

8. Ясно, что разбиение плоскости всегда имеет неограниченные грани и неограниченные ребра. Когда оно имеет ограниченные грани (ограниченные ребра)?

§ 2. ЧТО ТАКОЕ ЭЙЛЕРОВА ХАРАКТЕРИСТИКА?

Формулы Эйлера для прямой и плоскости, доказанные в § 1, являются проявлением следующего общего замечательного факта. Пусть Φ — фигура, разбитая каким-то образом на части, которые мы будем называть *вершинами*, *ребрами* и *гранями*. Обозначим число вершин, число ребер и число граней разбиения

соответственно через B , P и Γ . Для всех частей разбиения будет еще использоваться объединяющее название: *клетки*, т. е. вместо слов «границы, ребра и вершины разбиения» будем говорить короче «клетки разбиения». Оказывается, что независимо от способа разбиения фигуры Φ на клетки знакопеременная сумма $B - P + \Gamma$ сохраняет постоянное значение, или, иначе говоря, является инвариантной (т. е. неизменной) относительно способа разбиения. Эта сумма называется *эйлеровой характеристикой* фигуры и обозначается греческой буквой χ (читается «хи»). Таким образом, по определению

$$\chi(\Phi) = B - P + \Gamma.$$

Как было показано выше, эйлерова характеристика прямой равна -1 , а плоскости — равна 1 .

В знакопеременной сумме $B - P + \Gamma$, определяющей эйлерову характеристику, порядок слагаемых не случаен: он зависит от *размерности* клеток, соответствующих этим слагаемым. Иначе говоря, B обозначает число нульмерных клеток разбиения, т. е. клеток, имеющих размерность, равную нулю; P обозначает число одномерных и Γ — число двумерных клеток. Заметим, что нульмерные клетки (или вершины) — это точки, одномерные клетки (или ребра) чаще всего являются прямолинейными отрезками, а двумерные клетки (границы) — выпуклыми многоугольниками.

Данное здесь определение эйлеровой характеристики нуждается в уточнении: следует еще указать, какие классы фигур мы рассматриваем, что понимается под клетками в каждом конкретном случае и, наконец, как определяется разбиение фигуры на клетки, т. е. как различные клетки «примыкают» друг к другу. Этим вопросам посвящен почти весь § 2.

Итак, рассмотрим некоторые классы фигур, для которых можно определить эйлерову характеристику.

Пусть $A_1, \dots, A_n$ — различные точки на плоскости. *Незамкнутая ломаная линия* с вершинами в этих точках определяется как объединение прямолинейных отрезков $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$, называемых ее *ребрами*. Если $n \geq 3$ и если первая и последняя вершины совпадают (т. е. $A_1 = A_n$), а все остальные вершины различны, то ломаная называется *замкнутой*. Два ребра ломаной, имеющие общую вершину, считаются *смежными*. Ломаная (замкнутая или нет) называется *простой*, если никакие два ее ребра, не являющиеся смежными,

не имеют общих точек. Простую замкнутую ломаную назовем *контуром*.

Ясно, что эйлерова характеристика $\chi(L) = B - P$ равна 1 для незамкнутой ломаной L и равно 0 для замкнутой. Легко также проверяется, что $\chi(L)$ не изменится, если вставить произвольное число m новых вершин внутрь какого-нибудь ребра, разбивая его тем самым на новые ребра в числе $m+1$, или, наоборот,

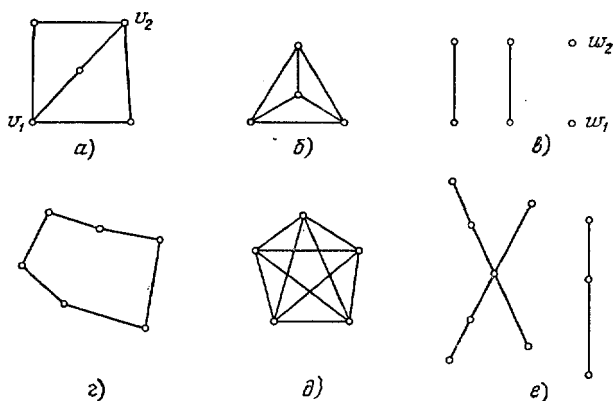


Рис. 4.

если заменить одним ребром несколько последовательных ребер, лежащих на одной прямой.

Графом называется фигура G , состоящая из конечного числа *вершин* (расположенных на плоскости или в пространстве) и прямолинейных отрезков, соединяющих некоторые пары вершин. Эти отрезки называются *ребрами* графа. Ясно, что, в частности, всякая ломаная является графом. Эйлерова характеристика графа есть разность $B - P$; она инвариантна в том же смысле, что и у ломаной. Может случиться, что граф G совсем не имеет ребер, а состоит только из n вершин; в этом случае $\chi(G) = n$. Примеры графов показаны на рис. 4; при этом их вершины изображены маленькими светлыми кружками. Из рисунка видно, что некоторые ребра могут иметь «лишние» точки пересечения, которые не являются вершинами. Читатель проверит, что эйлеровы характеристики графов а), б), в), г), д), е) на этом рисунке равны соответственно $-1, -2, 4, 0, -5, 2$.

Степенью вершины графа называется число ребер, соединяющих ее с другими вершинами. На рис. 4, например, у графа *а*) вершины v_1 и v_2 имеют грань 3; степени остальных его вершин равны 2. Граф *в*) имеет две вершины степени 0 (а именно, w_1 и w_2) и четыре вершины степени 1. Степень каждой вершины графа *б*) равна 3, а графа *д*) равна 4. Вершины степени 0 называются еще *изолированными*.

Граф называется *связным*, если любые две его вершины можно соединить незамкнутой ломаной, состоящей из ребер графа.

Говорят, что граф *вкладывается в плоскость*, если его можно начертить на плоскости так, чтобы ребра пересекались только в вершинах. Таков, например, граф *а*), изображенный на рис. 5 (так называемый *полный* граф с четырьмя верши-

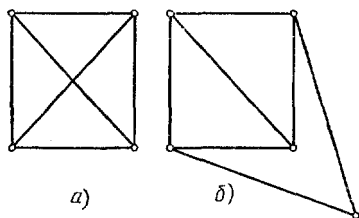


Рис. 5.

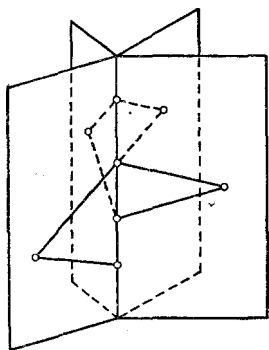


Рис. 6.

нами), ибо его можно «перечертить» так, чтобы лишние пересечения ребер исчезли (рис. 5, б). Правда, при этом перечерчивании нам пришлось заменить одно ребро графа двумя ребрами и ввести новую вершину. Обычно считается, что при этом граф «не изменился», во всяком случае, его эйлерова характеристика сохранила свое значение. Обратите еще внимание на то, что на рис. 4, б) изображен «тот же самый» граф, что и на рис. 5, а) и притом без лишних пересечений ребер и без введения новых вершин. Вообще, все графы рис. 4, кроме д), вкладываются в плоскость. С другой стороны, граф д) (называемый *полным* графом с пятью вершинами) в плоскость не вкладывается, даже если вводить новые вершины (см. задачу 13).

Интересно отметить, что каждый граф можно расположить в пространстве без лишних пересечений ребер.